Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle [- 1 ; 1].
On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. a. Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle [- 1 ; 1], on a l'égalité :
$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}.$$
b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur [- 1 ; 1] par
$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$
c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [- 1 ; 1].
Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :
$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :
$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0;0;2)$, $(-1;2;1)$ et
$(-1;2;5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

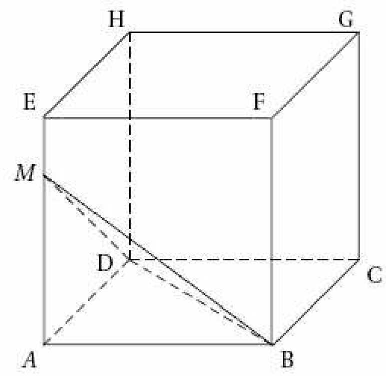
b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :
$$\left\{\left(M; a^2\right), (B; 1), (D; 1)\right\}.$$
a. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.
b. Calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$.
c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.
d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.
b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



CORRECTION - DM - Barycentres et produit scalaire

EXERCICE 1

1) Le volume d'une pyramide est $V = \frac{1}{3}\ h\ .\ B$ où h est la hauteur et B l'aire de la base

Ici : $h = AM = \frac{AE}{a} = \frac{1}{a}$ et $B = A_{ABD} = \frac{1 \text{ x } 1}{2} = \frac{1}{2}$ $\boxed{V_{ABDM} = \frac{1}{6a} \text{ u.a.}}$

2) K = bar. {(M,a²) (B,1) (D,1)} Noter qu'ainsi défini K est un point du plan (BDM)

a. Par définition $a^2\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$ d'où

$a^2\ \overrightarrow{KB} + a^2\ \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$ soit $\boxed{\overrightarrow{BK} = \frac{a^2\ \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}}{a^2 + 2}}$

b. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a^2+2}(a^2\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{a^2+2}\ (a^2.AM^2 + 0) = \frac{1}{a^2+2}$

car $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2+2}(a^2\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{a^2+2}\ (0 + AD^2) = \frac{1}{a^2+2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = -\ \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} = 0}$ Ces vecteurs sont orthogonaux.

c. Les points B et D jouent des rôles symétriques : leurs pondérations sont les mêmes, et par symétrie du plan (AEG) M et A sont invariants et B et D sont les images respectives l'un de l'autre.

D'après le résultat précédent $\boxed{\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MD} = 0}$

d. Puisque (BK) et (MD) sont perpendiculaires (car K Є (BDM)), K est un point de la hauteur de BDM issue de B. De même, (DK) et (MD) étant perpendiculaires, K est un point de la hauteur de BDM issue de D. K est donc l'intersection de ces hauteurs, soit l'orthocentre de BDM

3) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}).\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MB} + 0 = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = 0 + 0$

De même $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}).\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MD} + 0 = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = 0 + 0$

La droite (AK) est donc orthogonale à 2 droites non parallèles du plan (BDM) : elle est donc orthogonale à ce plan.

4) Les triangles AMD et AMB sont isométriques puisque AB = AD et $\widehat{MAD} = \widehat{MAB} = \frac{\pi}{2}$

a. Donc MD = MB et BDM est isocèle.

On nomme I le milieu de [BD]. Alors $A_{MDB} = \frac{BD.IM}{2}$ puisque BDM est isocèle, avec

$BD = \sqrt{2}$ et et $BM^2 = 1 + (\frac{1}{a})^2$ soit $IM^2 = 1 + (\frac{1}{a})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2}$. Finalement,

$\boxed{A_{MDB} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+2}}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} \text{ unité d'aires}}$

b. On résout $A_{BDM} = 1$ soit (a étant positif) $a^2 + 2 = 4a^2$, soit $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

On peut utiliser la formule donnant la distance d'un point à un plan, mais il est plus judicieux de remarquer que le volume V_{ABDM} se calcule par la formule $\frac{1}{3}$ AK. A_{BDM} puisque AK est la hauteur de ce tétraèdre (vue question 3). Les résultats des questions 1) et 4a) donnent :

$\frac{1}{6a} = \frac{1}{3}\ AK\ .\ \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ soit $AK = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$ d'où $\boxed{AK = \sqrt{\frac{3}{8}}}$ pour $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

EXERCICE 2

1) Construction : on ne peut pas utiliser l'associativité avec les points B et C puisque (1) + (-1) = 0

On note G' le barycentre de (A ;2) (B ;1) avec $\boxed{\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$. Alors G_1 est le barycentre de (C ;-1) et (G' ;3) soit

$\boxed{\overrightarrow{CG_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG'}}$. *Construction symétrique pour G_{-1}*

2) Par définition, $(k^2 + 1)\overrightarrow{G_kA} + k\ \overrightarrow{G_kB} - k\ \overrightarrow{G_kC} = \overrightarrow{0}$ soit $(k^2 + 1 + k - k)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{(k^2+1)}\ \overrightarrow{BC}}$

b) f est dérivable sur [-1 ; 1] comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$f'(x) = -\frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$. On note que sur [-1 ; 1] f ' est négative, donc f décroît, avec

$f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = -\frac{1}{2}$. *Remarque : f est impair, ce qui confirme cette tendance.*

c) G_k est d'après 2a) un point de la parallèle à (BC) passant par A. Pour k ϵ [-1 ; 1], G_k décrit un segment, délimité par les valeurs $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = -\frac{1}{2}$. donc $\boxed{\text{K parcours le segment } [G_{-1}\ G_1]}$

3) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MG_1}$ (utiliser la relation de Chasles et la définition de G_1)
$2\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MG_{-1}}$ (idem)
La relation s'écrit donc $\|2\ \overrightarrow{MG_1}\| = \|2\ \overrightarrow{MG_{-1}}\|$ soit $2\ MG_1 = 2\ MG_{-1}$. les points M sont les points équidistants de G_1 et G_{-1}, soit $\boxed{\text{le plan médiateur du segment } [G_1G_{-1}] \text{ (qui passe par A)}}$

4) De même, avec $2\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 0\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\ \overrightarrow{AI}$,

On obtient $2\ MG_1 = \|-2\ \overrightarrow{AI}\|$ soit $MG_1 = AI$. $\boxed{\text{M parcours la sphère de centre } G_1 \text{ et de rayon AI.}}$

5) D'après les formules du cours G_k a pour coordonnées

$G_k\ \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 0 - k + k \\ 0 + 2k - 2k \\ 2(k^2+1) + k - 5k \end{pmatrix}$ soit $\frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(k-1)^2 \end{pmatrix}$. D'où $G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G_{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La distance du point G_1 au plan (E) est $G_1A = 2$. La distance AI vaut $AI = \sqrt{6}$. le rayon de la sphère (F) de centre G_1 est donc supérieure à la distance entre G_1 et le plan (E) : $\boxed{\text{ces 2 ensembles sont donc sécants}}$

On peut remarquer que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{G_1A} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}$ et la le rayon du cercle intersection du plan (E) et de la sphère (F) est ici la longueur AH, avec AHG_1 rectangle en A et $BG_1 = HG_1 = AI = \sqrt{6}$

D'où d'après le théorème de Pythagore $AH = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$ $\boxed{\text{Le cercle cherché a pour rayon } \sqrt{2}}$