LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Connu :

- limites, asymptotes (H,V,O), en $+-\infty$, en a , formes indéterminées
- Suites CV, DV, théorème des gendarmes (pour les suites)

A connaître :

- définitions : limite ∞.
- Suite croissante non majorée (resp..)
- limite finie
- Limite en $+-\infty$ d'une fonction, limite réelle, asymptote
- Limite en a d'une fonction, limite réelle, asymptote
- théorèmes des gendarmes, de comparaison
- opérations sur les limites : + x : o ; f o U ; FI

Méthodes à connaître et exercices à faire :

- Déterminer une limite (suite ou f°) avec la définition
- Conjecturer, éventuellement avec la calculatrice
- reconnaître les opérations sur les limites
- appliquer les théorèmes gendarmes, encadrement
- Prouver qu'une droite est asymptote
- pour les polynômes, fractions rationnelles, racines carrées : savoir factoriser, x qté conjuguée, écriture $ax + b + \dfrac{c}{x + d}$
- reconnaître un taux de variation
- étudier des fonctions sans limite

Plan :

I LIMITES DE SUITES

1) Limite infinie

Dire qu'une suite U a pour limite $+\infty$, c'est dire que :
Tout intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Dire qu'une suite V a pour limite $-\infty$, c'est dire que :
Tout intervalle de la forme $]-\infty\ ; B\ ]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Notations : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

On dit que U tend vers $+\infty$, V vers $-\infty$

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

2) Suite croissante non majorée.

Une suite U est majorée s'il existe un réel M, tel que pour tout entier n, $U_n \leq M$.
Une suite V est minorée s'il existe un réel m, tel que pour tout entier n, $V_n \geqslant m$.

Exemples : la suite $U_n = -\sqrt{n}$ est majorée par 0. La suite $V_n = 1 + \frac{1}{n}$ est minorée par 1.

> Théorèmes :
> Si U est une suite croissante et non majorée, alors U tend vers $+\infty$.
> Si V est une suite décroissante et non minorée, alors V tend vers $-\infty$.

Démo : Si A est un nombre réel, il existe un rang N pour lequel $U_N > A$ car U n'est pas majorée. U étant croissante, tous les termes suivants seront plus grand que U_N, donc dans l'intervalle $[A\ ; +\infty[$

Remarque : ces théorèmes restent valables si la monotonie n'est valable qu'à partir d'un certain rang.

3) Limite finie.

L est un nombre réel. Dire que U a pour limite L, c'est dire que :
Tout intervalle de la forme $]\ L - a\ ; L + b\ [$ $(a > 0$ et $b > 0)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$. On dit dans ce cas que U converge vers L, où que U est convergente.

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $0 \leq q < 1$

Vocabulaire : une suite qui n'est pas convergente est dite divergente (par exemple si elle tend vers $+\infty$, ou si elle n'a pas de limite).

II EXTENSION AUX LIMITES DE FONCTIONS

1) Limite finie en $+\infty$ (à étendre en $-\infty$)

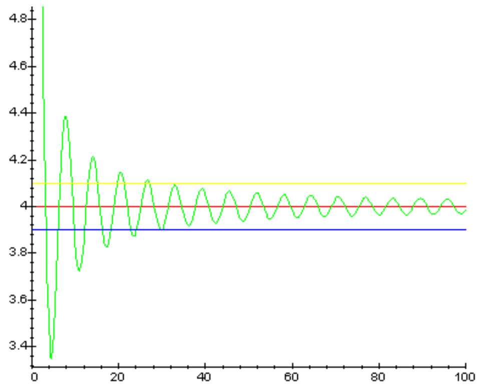
L est un nombre réel. Dire que la fonction f a pour limite L en $+\infty$, c'est dire que :
Tout intervalle de la forme] L – a ; L + b [(a > 0 et b > 0) contient toutes les valeurs f(x) dès qu' x est assez grand.

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-a} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-a)^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x-a)^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$

Représentation graphique :

On dit que la droite y = L est asymptote (horizontale) à la courbe représentant f (elle s'en rapproche indéfiniment)



2) Limite infinie en $+\infty$ (à étendre en $-\infty$)

Dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ c'est dire que :
Tout intervalle de la forme [A ; $+\infty$[contient toutes les valeurs de f(x) dès qu' x est assez grand.

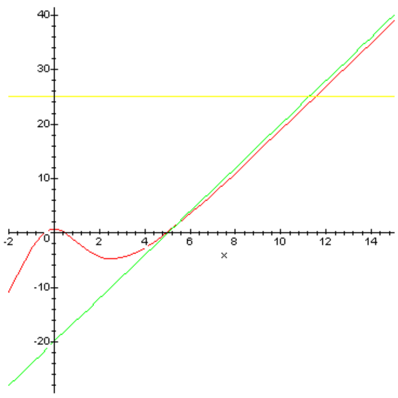
Dire que g a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ c'est dire que :
Tout intervalle de la forme] $-\infty$; B] contient toutes les valeurs de g(x) dès qu' x est assez *grand*.

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

Représentation graphique :

A partir de certaines valeurs de x, la courbe est toujours au dessus de 25.

On voit sur cet exemple une droite asymptote (oblique) :
La droite d'équation y = ax+ b est asymptote à la courbe en $+\infty$ si :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

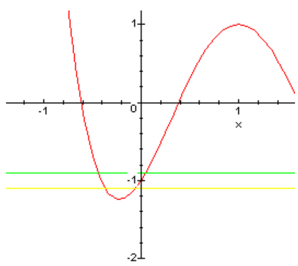


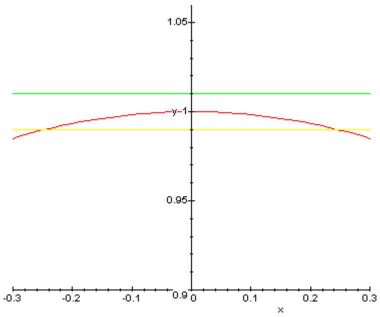
3) Limite finie en un réel x_o

L est un nombre réel. Dire que la fonction f a pour limite L en x_o, c'est dire que :
Tout intervalle de la forme] L – a ; L + b [(a > 0 et b > 0) contient toutes les valeurs f(x) dès qu' x est assez proche de x_o. (dans un intervalle] x_{o-r} ; x_{o+r} [)

Exemples :
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$
dans ce cas $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



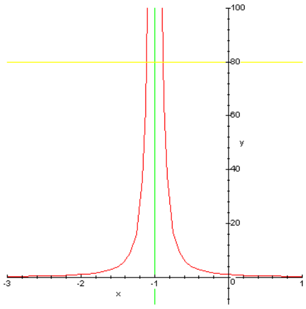


$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$$

4) Limite infinie en un réel

Dire que f a pour limite $+\infty$ en x_0, c'est dire que :

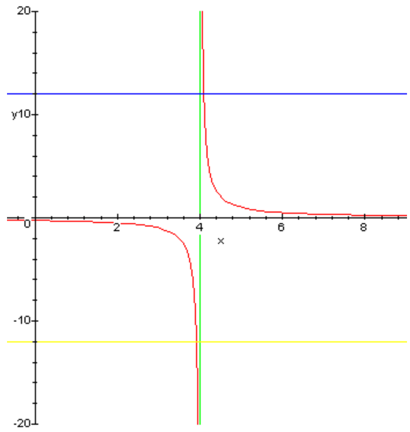
Tout intervalle de la forme $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) dès qu' x est assez proche de x_0.



Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

On dit que la droite d'équation x = -1 est asymptote (verticale) à la courbe.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$



Autre exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

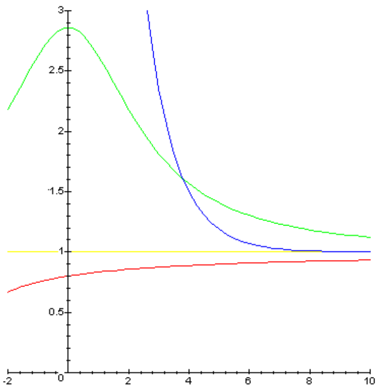
La courbe n'a pas le même comportement avant et après 4 :

$\lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

On dit que la droite d'équation x = 4 est asymptote à la courbe.

III POUR DETERMINER DES LIMITES DE FONCTIONS :théorèmes de comparaison

1) Théorème « des gendarmes »



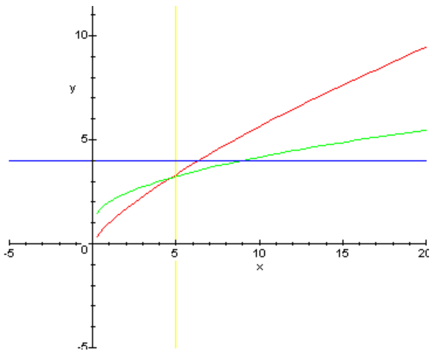
Théorème : f, g, h sont 3 fonctions, L est un réel.

Si :
* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$
* $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$
* Pour x assez grand : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Démo : *Soit un intervalle de la forme $]L - a ; L + b[$. il existe M_g tel que si $x > M_g$ alors g(x) est dans $]L - a ; L + b[$. De même il existe M_h tel que si $x > M_h$, alors h(x) est dans $]L - a ; L + b[$.*

De plus, il existe M_f tel que si $x > M_f$, alors $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. On appelle M le plus grand de M_g, M_h, et M_f. A si x > M, f(x) est dans $]L - a ; L + b[$.



2) Théorèmes de comparaison de fonctions.

Théorème : f et g sont 2 fonctions

Si : * $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

* Pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>Démo :</u> *Soit un intervalle de la forme [A + ∞[. Il existe M_g tel que si $x > M_g$, alors g(x) est dans [A + ∞[.De plus il existe M_f tel que si $x \geq M_f$, alors $f(x) \geq g(x)$. Si M est le plus grand de M_f et M_g, alors pour $x > M$, f(x) est dans [A + ∞[.*

<u>Rq :</u> de même si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et pour x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3) Exemples :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) + x$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n + (-1)^n}{n^2}$

<u>IV OPERATIONS ET LIMITES</u>

Ces propriétés très intuitives sont admises.

a désigne un réel, ou +∞, ou - ∞
L et L' désignent 2 réels
f et g sont deux fonction (ou 2 suites)

1) <u>Limite d'une Somme de 2 fonctions (ou 2 suites)</u>

SOMME

Limite de f en *a*	L	L	L	+∞	+∞	-∞
Limite de g en *a*	L'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
Limite de f + g en *a*	L + L'	+∞	-∞	+∞	**FI**	-∞

<u>Remarque :</u> les formes indéterminées doivent être étudiées au cas par cas : on peut obtenir +∞, -∞, un réel (même 0) comme limite, voire pas de limite du tout (cf exercices)

2) <u>Limite d'un Produit de 2 fonctions (ou 2 suites)</u>

PRODUIT

Limite de f en *a*	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	+∞	+∞	-∞	0
Limite de g en *a*	L'	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞	+∞ ou -∞
Limite de f x g en *a*	L . L'	+∞	-∞	-∞	+∞	+∞	-∞	+∞	**FI**

(Idem au sujet des FI)

3) <u>Limite d'un Quotient de 2 fonctions (ou 2 suites)</u>

On supposera que g ne s'annule pas sur l'ensemble de définition considéré. (Par contre g peut tendre vers 0 !)

QUOTIENT

Limite de f en *a*	L	L	+∞	+∞	- ∞	-∞	+∞ ou -∞
Limite de g en *a*	L' ≠ 0	+∞ ou -∞	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	+∞ ou -∞
Limite de $\dfrac{f}{g}$ en *a*	$\dfrac{L}{L'}$	0	+∞	-∞	-∞	+∞	**FI**

QUOTIENT : quand g tend vers 0

Limite de f en *a*	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0
Limite de g en *a*	0 en restant positif (0^+)	0 en restant positif (0^+)	0 en restant négatif (0^-)	0 en restant négatif (0^-)	0
Limite de $\frac{f}{g}$ en *a*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

4) Limite de la composée de 2 fonctions

a, *b*, *c*, désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Propriété : Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{X \to b} g(X) = c$

Alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

Exemple : Soit $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$ sur $]-7 ; +\infty[$. On cherche $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

On pose $f(x) = \frac{1}{x+7}$ et $g(X) = \sqrt{X}$. alors $h = g \circ f$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{X \to 0} g(X) = 0$, d'après le propriété de la limite de la composée de 2 fonctions, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$

5) Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

a, *b*, désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. U est une suite, f une fonction

Propriété : Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = a$ et $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Alors $\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = b$

Exemple d'utilisation : Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{7^n} + 9}$

On pose $U_n = \frac{1}{7^n}$ $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ (suite géométrique $0 < q < 1$)

$f(x) = \sqrt{x+9}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{7^n} + 9} = 3$

6) Quelques méthodes.

Pour lever des indéterminations, on peut utiliser :

- Un encadrement + th. des gendarmes.
- Une inégalité + th. de comparaison
- Une factorisation quand x trend vers l'infini (analogue au théorème du monome de plus haut degré)
- Reconnaître un taux de variations
- Utilisation de la quantité conjuguée.
- …

$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 + 1} - x^2$